Massachusetts Teknoloji Enstitüsü-Fizik Bölümü

Fizik – 8.01 **Ödev # 2** **Güz, 1999**

ÇÖZÜMLER

Dru Renner

Problem 2.1

(a) İlk taşın hareketini matematiksel olarak tanımlamamız gerekir. Bu dikey yönde dünyanın çekiminden dolayı sabit ivmeli olan bir boyutlu bir problemdir. Dünyanın yüzeyinden yukarı doğru olan dikey yönü x-ekseni olarak seçelim ve orijin (x=0) dünyanın yüzeyindedir. Eğer $v_0 = 15\,m/s$ ve $g = 9.8\,m/s^2$ olarak ve $t = 0$ ı taşın atıldığı an olarak alırsak, bu durumda hareket

$$x = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

Şeklinde olur. Şimdi ilk taş ne zaman $h = 11.0\,m$ de olacaktır diye sorabiliriz. Bu eşitlik

$$h = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

Şeklinde yazılabilir. Bu t ye bağlı olarak ikinci dereceden bir denklemdir ve aşağıda verilen iki çözümü vardır.

$$t_{\pm} = \frac{v_0 \pm \sqrt{v_0^2 - 2gh}}{g} \qquad \Rightarrow \qquad t_- = 1.22\ s \quad \text{ve} \quad t_+ = 1.84\ s$$

Eğer ikinci taş için nicelikleri x', t' ve v_0' olarak belirlersek bu durumda benzer olarak

$$x' = v_0' t' - \frac{1}{2} g t'^2$$

Yazılabilir. Fakat burada dikkatli olmanız gereklidir. t' ikinci taş atıldıktan sonra geçen zamandır. Ve ikinci taş, birinci taş atıldıktan bir saniye sonra atılmıştır. Yani taşların atılmaları arasında $\Delta t = 1.00\ s$ lik bir gecikme söz konusudur. Böylece t' ve t arasındaki ilişkiyi

$$t' = t - \Delta t$$

Şeklinde yazabiliriz. Şimdi $t = t_{\pm}$ ya da $t' = t_{\pm} - \Delta t$ zamanlarında iki taşın birbirlerine çarpması gerekir. Bu $x' = h$ olduğunu belirtir. Bu durum

$$h = v_0'(t_{\pm} - \Delta t) - \frac{1}{2} g (t_{\pm} - \Delta t)^2$$

Denkleminin yazılmasını gerektirir. Çözümünden

$$v_0' = \frac{h + \frac{1}{2} g (t_{\pm} - \Delta t)^2}{t_{\pm} - \Delta t}$$

Elde edilir. $t_{\pm}$ nın mümkün iki değeri için, iki tane v_0' hızı vardır.

$$t_- = 1.22\ s \text{ için } v_0' = 51.1\,\mathrm{m/s} = 114\,\mathrm{mil/sa}$$

Ve

$$t_+ = 1.84\ s \text{ ile } v_0' = 17.2\,\mathrm{m/s} = 38{,}5\,\mathrm{mil/sa}$$

114 mil/sa hızı oldukça iyi bir hızdır, hemen hemen bir tenis servisinde atılan bir topun hızı (bu yaklaşık 140 mil/sa olabilir) kadardır. Bundan dolayı, akla yatkın olan cevap $17.2\,\mathrm{m/s} = 38.5\,\mathrm{mil/sa}$ olandır.

(b) Şimdi, ikinci taşı atmadan önce 1.30s beklemelisiniz. Yukarıdaki eşitlik($v_0' = \frac{h + \frac{1}{2} g (t_{\pm} - \Delta t)^2}{t_{\pm} - \Delta t}$) hala geçerlidir. Fakat şimdi $\Delta t = 1.30 s$ dir. Dikkat etmeniz gereken ilk şey $t_- = 1.22\ s$ nin $\Delta t = 1.30 s$ den daha küçük olduğudur. Böylece ilk taş, siz ikinci taşı atmadan *h* yüksekliğine ulaşır. Böylece ilk taşa çarpmanın tek yolu $t_+ = 1.84\ s$ dir ve buda hızın $v_0' = 23.0\,\mathrm{m/s} = 51\,\mathrm{mil/sa}$ olması demektir.

Problem 2.2

Eğer bir cisim t zamanı boyunca serbest düşme yaparsa, bu durumda alacağı mesafe

$$d = \frac{1}{2} g t^2$$

İle verilir. Böylece t ve d yi ölçerek g nin değerini hesaplarız.

$$g = \frac{2d}{t^2}$$

Eğer d yi ölçerken yapılan hata Δd ve t yi ölçerken yapılan hata Δt ise, bu durumda basit hesaplama ile g deki hata

$$\frac{2(d+\Delta d)}{(t-\Delta t)^2}-g$$

Burada ilk terim g nin Δd ve Δt nin değerleri kullanılarak elde edilen en büyük değerini göstermektedir.

Dersteki verilerden, Boston'da g nin deneysel hatalar içerisinde elde edilen değeri ve $g=9.80\,m/s^2$ ile uyumluluğu aşağıda verilmiştir.

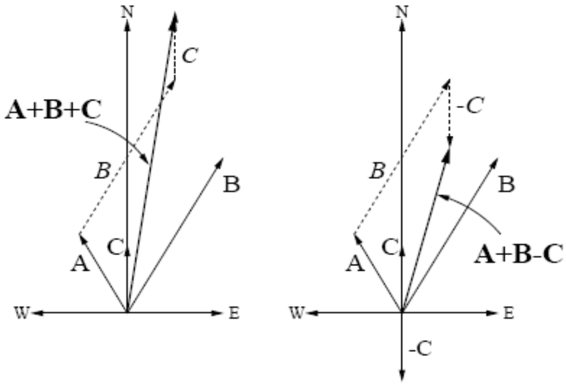
Düştüğü Mesafe	Uçuş Süresi	g nin Deneysel değeri	Uyumluluk
$d=3.000\pm0.003\,m$	$t=0.781\pm0.002\,s$	$g=9.84\pm0.06\,m/s^2$	Evet
$d=1.500\pm0.003\,m$	$t=0.551\pm0.002\,s$	$g=9.88\pm0.09\,m/s^2$	Evet
$d=1.500\pm0.003\,m$	$t=0.550\pm0.002\,s$	$g=9.92\pm0.09\,m/s^2$	Hayır

En alttaki g değeri $g=9.80\,m/s^2$ ile uyumlu değildir. Bu büyük bir ihtimalle d deki hatayı oldukça küçük tahmin etmekten kaynaklanmaktadır. Elmanın tutulma şekli ve elmanın düşerken dönmesinin hesaba katılması oldukça zordur. Yani, $0.003\mathrm{m}$ hata muhtemelen çok küçüktür.

Problem 2.3

$\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}$ vektörlerinin toplamı grafik metodu ile (1) $\vec{A}$ çizilir, (2) $\vec{B}$ nin kuyruğu $\vec{A}$ nın ucuna gelecek şekilde kaydırılır, (3) $\vec{C}$ nin kuyruğu $\vec{B}$ nin ucuna gelecek şekilde kaydırılır ve (4) $\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}$ nü elde etmek için $\vec{A}$ nın kuyruğundan $\vec{C}$ nin ucuna çizgi çizginin çekilmesi şeklinde gerçekleştirilir.

$-\vec{C}$ vektörü $\vec{C}$ ile aynı uzunlukta fakat ters yönde çizilen vektördür. Bu durumda $\vec{A}+\vec{B}-\vec{C}$ vektörü grafik olarak yukarıdaki ile aynı şekilde çizilmiştir Fakat burada $\vec{C}$ vektörü yerine $-\vec{C}$ vektörü kullanılmıştır.



Problem 2.4

$\vec{A}$ vektörü $A_x = 5.0$, $A_y = -3.0$ ve $A_z = 1.0$ bileşenlerine sahiptir. Bu durumda büyüklüğü

$$|A| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} = \sqrt{(5.0)^2 + (-3.0)^2 + (1.0)^2} = \sqrt{35.0} = 5.9$$

Şeklinde verilir. θ_x açısı $\vec{A}$ vektörü ile x-ekseni arasındaki açıdır ve

$$A_x = |A| \cos\theta_x$$

Eşitliğinden elde edilir. Bu bize

$$\theta_x = \cos^{-1}\left(\frac{A_x}{|A|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{5.0}{\sqrt{35.0}}\right) = 32.3^0$$

Değerini verir. Benzer olarak

$$\theta_y = \cos^{-1}\left(\frac{A_y}{|A|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{-3.0}{\sqrt{35.0}}\right) = 120^0$$

ve

$$\theta_z = \cos^{-1}\left(\frac{A_z}{|A|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{1.0}{\sqrt{35.0}}\right) = 80.3^0$$

Olarak elde edilir.

Problem 2.5

Sizlere

$$\vec{v} = 3\hat{x} - 6\hat{y} + 2\hat{z}$$

Vektörü verilmiştir. Bunun büyüklüğü $|\mathrm{v}|=\sqrt{49}=7$ dir. Böylece

$$\vec{v}'=\frac{1}{|v|}\vec{v}=\frac{3}{7}\hat{x}-\frac{6}{7}\hat{y}+\frac{2}{7}\hat{z}$$

$\vec{v}$ ile aynı yöne sahiptir fakat büyüklüğü, $|v'|=1$ dir. Sonuç olarak, vektör

$$\vec{v}''=2\vec{v}'=\frac{6}{7}\hat{x}-\frac{12}{7}\hat{y}+\frac{4}{7}\hat{z}$$

$\vec{v}'$ ile aynı yöne sahiptir, aynı zamanda $\vec{v}$ ile de aynı yönlüdür. Fakat şimdi büyüklüğü $|v''|=2$ dir

Problem 2.6

Venlo'ya olan mesafenin 31 km olduğu ve Eindhoven' a olan mesafenin 39 km olduğunu sizlere verilmiştir. Fakat sizlere bu şehirlere gidilecek yönler hakkında herhangi bir bilgi verilmemiş. Bu iki şehir arasındaki en büyük mesafe $31km+39km=70km$ dir. Bu durum bu iki şehir ters yönlerde olduğu zaman geçerlidir. Bu iki şehir arasındaki minimum mesafe $39km-31km=8km$ dir. Bu durum ise iki şehir aynı yönde olduğu zaman geçerlidir. Asıl mesafe 47 km dir ve 8 km den büyük 70km den küçüktür.

Problem 2.7

$$\vec{A}=2\hat{x}-3\hat{y} \quad \text{ve} \quad \vec{B}=-1\hat{x}+a\hat{y}-5\hat{z}$$

Vektörleri sizlere verilmiştir. Şimdi $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ vektörlerini dik yapacak olan a değerini seçmelisiniz. Matematiksel olarak

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=0$$

Şartının sağlanması gerekir.

$$A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z=0$$

$$2(-1)+(-3)(a)+0(-5)=0$$

$$a=-\frac{2}{3}$$

Problem 2.8

Sizlere

$$\vec{A}=-5\hat{x}-3\hat{y}+\hat{z} \quad \text{ve} \quad \vec{B}=2\hat{x}+1\hat{y}-3\hat{z}$$

Vektörleri verilmiştir. (a), (b) ve (c) şıkları bileşenler yöntemi ile yapılır.

(a)

$$\begin{aligned}\vec{A}+\vec{B} &= (-5+2)\hat{x}+(-3+1)\hat{y}+(1+(-3))\hat{z} \\ &= -3\hat{x}-2\hat{y}-2\hat{z}\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\vec{A}-\vec{B} &= (-5-2)\hat{x}+(-3-1)\hat{y}+(1-(-3))\hat{z} \\ &= -7\hat{x}-4\hat{y}+4\hat{z}\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{2A}-3\vec{B} &= (2(-5)-3(2))\hat{x}+(2(-3)-3(1))\hat{y}+(2(1)-3(-3))\hat{z} \\ &= -16\hat{x}-9\hat{y}+11\hat{z}\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}\vec{A}\cdot\vec{B} &= (-5)(2)+(-3)(1)+(1)(-3) \\ &= -16\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{B}\cdot\vec{A} &= (2)(-5)+(1)(-3)+(-3)(1) \\ &= -16\end{aligned}$$

Gerçekten herhangi iki vektör için $\vec{A}\cdot\vec{B}=\vec{B}\cdot\vec{A}$ olduğu doğrudur.

(e)

$$\begin{aligned}\vec{A}\times\vec{B} &= ((-3)(-3)-(1)(1))\hat{x}+((1)(2)-(-5)(-3))\hat{y}+((-5)(1)-(-3)(2))\hat{z} \\ &= 8\hat{x}-13\hat{y}+1\hat{z}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{B}\times\vec{A} &= ((1)(1)-(-3)(-3))\hat{x}+((-3)(-5)-(2)(1))\hat{y}+((2)(-3)-(1)(-5))\hat{z} \\ &= -(8\hat{x}-13\hat{y}+1\hat{z})\end{aligned}$$

Gerçekten herhangi iki vektör için $\vec{A}\times\vec{B}=\overrightarrow{-B}\times\vec{A}$ olduğu doğrudur.

<u>**Problem 2.9**</u>

Bizlere

$$\vec{A}=2\hat{x}-3\hat{y} \text{ ve } \vec{B}=-\hat{x}+4\hat{y}-5\hat{z}$$

Vektörleri verilmiştir. Ve bizler büyüklüğü bir olan ($|V|=1$) ve hem $\vec{A}$ vektörüne ve hem de $\vec{B}$ vektörüne dik olan ($\vec{V}\cdot\vec{A}=0$ ve $\vec{V}\cdot\vec{B}=0$)

$$\vec{V} = a\hat{x} + b\hat{y} + c\hat{z}$$

Vektörü elde etmek istiyoruz.

$$\vec{V} \cdot \vec{A} = 0$$

$$\Rightarrow 2a - 3b = 0$$

$$\Rightarrow a = \frac{3}{2}b$$

$$\vec{V} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\Rightarrow -a + 4b - 5c = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{2}{3}b + 4b - 5c = 0$$

$$\Rightarrow b = 2c$$

$$\Rightarrow a = 3c$$

Böylece $\vec{\mathrm{V}}$ vektörünün aşağıdaki şekilde olduğunu elde ederiz.

$$\vec{V} = 3c\hat{x} + 2c\hat{y} + c\hat{z}$$

Şimdi $\vec{\mathrm{V}}$ vektörünü birim vektör olacak şekilde elde edecek olursak

$$\left|\vec{V}\right| = 1$$

$$9c^2 + 4c^2 + c^2 = 1$$

$$14c^2 = 1$$

$$c = \pm \frac{1}{\sqrt{14}}$$

Bu sonuçta sadece iki vektör verir.

$$\vec{V} = \pm \frac{1}{\sqrt{14}}\left(3\hat{x} + 2\hat{y} + \hat{z}\right)$$

Bir başka yol olarak, hem $\vec{A}$ ya ve hem de $\vec{B}$ye dik olacak $\vec{\mathrm{A}} \times \vec{\mathrm{B}}$vektörünü oluştururuz. Daha sonra bunu birim vektör olacak şekilde normalize eder ve iki mümkün yönü de içermesini sağlarız. Bu

$$\vec{V} = \pm \frac{1}{\left|\vec{A} \times \vec{B}\right|} \vec{A} \times \vec{B}$$

Vektörünü verir. Bu vektörün yukarıdaki ile aynı olduğunu kontrol edebilirsiniz.

Problem 2.10

Zamanın fonksiyonu olarak konum

$$\vec{r} = (6-2t)\hat{x} + \left(3+4t-6t^2\right)\hat{y} - \left(1+3t-2t^2\right)\hat{z}$$

Şeklinde verilmiştir.

(a) Herhangi bir andaki hız vektörü

$$\begin{aligned}
\vec{v} &= \frac{d\vec{r}}{dt} \\
&= \frac{d}{dt}(6-2t)\hat{x} + \frac{d}{dt}\left(3+4t-6t^2\right)\hat{y} - \frac{d}{dt}\left(1+3t-2t^2\right)\hat{z} \\
&= (-2)\hat{x} + (4-6(2)t)\hat{y} - (3-2(2)t)\hat{z} \\
&= -2\hat{x} + (4-12t)\hat{y} - (3-4t)\hat{z}
\end{aligned}$$

Şeklinde verilir. Böylece $t=3$s de

$$\begin{aligned}
\vec{v} &= -2\hat{x} + (4-12(3))\hat{y} - (3-4(3))\hat{z} \\
&= -2\hat{x} - 32\hat{y} + 9\hat{z}
\end{aligned}$$

(b) $t=3$s deki sürat $\vec{v}$ nin büyüklüğü olarak verilir.

$$|v| = \sqrt{(-2)^2 + (-32)^2 + (-9)^2} = \sqrt{1109} = 33.3$$

Böylece sürat $33.3\,\mathrm{m/s}$ dir.

(c) Herhangi bir andaki ivme vektörü

$$\begin{aligned}
\vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} \\
&= \frac{d}{dt}(-2)\hat{x} + \frac{d}{dt}(4-12t)\hat{y} - \frac{d}{dt}(3-4t)\hat{z} \\
&= (0)\hat{x} + (-12)\hat{y} - (-4)\hat{z} \\
&= -12\hat{y} + 4\hat{z}
\end{aligned}$$

İle verilir. Böylece $t=3$s de ivme

$$\vec{a} = -12\hat{y} + 4\hat{z}$$

Şeklindedir. $t=3$s de ivmenin büyüklüğü

$$|a|=\sqrt{(0)^2+(-12)^2+(4)^2}=\sqrt{160}=12.6$$

Böylece $t=3$s de ivmenin büyüklüğü $12.6\,\mathrm{m/s^2}$ dir.

Problem 2.11

z-eksenini yukarı yönlü, x eksenini yatay olarak arabanın hareketi yönünde ve x-z başlangıcını rampanın köşesi olarak seçiniz. Arabanın rampanın köşesinde olduğu zamanı t başlangıcı olarak seçiniz ve bu andaki arabanın bilinmeyen hızı v_{0x} olsun. Arabanın bundan sonraki hareketi bir eğik atış hareketidir.

Arabanın dikey hareketi

$$z=-\frac{1}{2}gt^2$$

İle verilir. Böylece arabanın $h=2.0\,m$ mesafeyi ne kadar sürede düşeceğini sorabiliriz? Bu

$$-h=-\frac{1}{2}gt^2$$

Denklemini verir. Çözümünden

$$t^*=\sqrt{\frac{2h}{g}}=\sqrt{\frac{2(2.0\,m)}{(9.8\,m/s^2)}}=0.64\,s$$

Arabanın yatay hareketi

$$x=v_{0x}t$$

İle verilir. Böylece $t=t^*$ de, arabanın yatay konumu

$$x^*=v_{0x}t^*$$

Motokros şoförünün kaza yapmaması için, x^* mesafesi $d=24.0\,m$ den daha büyük olmalıdır. Böylece

$$x^*>d$$

$$v_{0x}t^*>d$$

$$v_{0x}>\frac{d}{t^*}$$

$$v_{0x} > \frac{d}{\sqrt{\frac{2h}{g}}} \qquad (t^* = \sqrt{\frac{2h}{g}} \text{ yazılarak})$$

Bundan dolayı, tüm arabalardan oluşan engelini atlamak için

$$v_{0x} > \frac{d}{\sqrt{\frac{2*2.0}{9.8}}}$$
$$> 37.6\, m/s$$

Olmalıdır.

<u>Problem 2.12</u>

Aynı eşitliğe 3 defa ihtiyacımız olacak. Keyfi bir top hız, v_0, keyfi bir açı, θ, ve keyfi bir *d* menzili düşünelim. Hareket eğik atış hareketi olacaktır. v_{0x} ve v_{0z} klasik nicelikleri

$$v_{0x} = v_0 \cos\theta \quad \text{ve} \quad v_{0z} = v_0 \sin\theta$$

Şeklinde verilir. Koordinat sistemini topun başlangıcı olarak seçmek ve klasik yatay ve dikeyi belirlemek en kolaydır.

$$z = v_0 \sin(\theta)t - \frac{1}{2}gt^2$$

Top yere düştüğü zaman olan t^* ı bilmek istiyoruz. Bu durumda eşitlik

$$0 = v_0 \sin(\theta)t^* - \frac{1}{2}gt^{*2}$$

Şeklini alır. Ve bu

$$t^* = 0 \text{ ve } t^* = {}^{2v_0 \sin(\theta)}\!\big/_{g}$$

Çözümlerini verir. Bunlardan sıfır olmayan zaman topun yere çarpma zamanıdır.

Yatay hareket

$$x = v_0 \cos(\theta)t$$

İle verilir. Böylece menzil

$$d = v_0 \cos(\theta)t^* = \frac{2v_0^2 \cos(\theta)\sin(\theta)}{g}$$

İle verilir. Bu denklemden v_0 çözülürse,

$$v_0 = \sqrt{\frac{gd}{2\cos(\theta)\sin(\theta)}}$$

Şeklinde elde edilir.

(a) Şimdi $\theta = 14^\circ$ ve $d = 240\,m$ olduğu zaman v_0 hızını bulmak istiyoruz.

$$v_0 = \sqrt{\frac{240(9.8)}{2\cos(14)\sin(14)}} = 70.8\,m/s$$

(b) Topun hızının $0.6\,m/s$ daha büyük olduğunu varsayalım. $\theta = 14^\circ$ ve $v_0 = 70.8 + 0.6 = 71.4\,m/s$ olduğu zaman *d* yi belirlemek istiyoruz.

$$d = \frac{2(71.4)^2\cos(14)\sin(14)}{9.8} = 244.1\,m$$

Top, $244.1\,m - 240.0\,m = 4.1\,m$ daha fazla yol alacaktır.

(c) Açının 0.5° daha büyük olduğunu varsayalım. θ açısı $\theta = 14^\circ + 0.5^\circ = 14.5^\circ$ ve $v_0 = 70.8\,m/s$ olduğu zaman *d* yi belirlemek istiyoruz.

$$d = \frac{2(70.8)^2\cos(14.5)\sin(14.5)}{9.8} = 248.0\,m$$

Top, $248.0\,m - 240.0\,m = 8.0\,m$ daha fazla yol alacaktır

<u>Problem 2.13</u>

Kayakçının hareketi problem 2.11 deki arabanın hareketine özdeştir. Eğer $v_0 = 110\,km/h = \frac{110\times10^3\,m}{(60)(60)\,s} = 30.6\,m/s$ olduğu benzer koordinat sistemi seçerseniz, Böylece hareket

$$x = v_{0x}t \quad \text{ve} \quad z = -\frac{1}{2}gt^2$$

İle verilir.

a) Yukarıdaki eşitlikler kayakçının hareketini tanımlar, fakat eşitlikler zemini nerede olduğunu bilemez. Biz bu bilgiyi vermeliyiz. Genelde bizler $z = 0$’ ın karşılık geldiği durumu zemin olarak seçeriz. Fakat bu durumda bu doğru değildir. Zemin gerçekten bir tepedir. $x = 0$ ve $z = 0$ daha başlar. Bu durumda aşağı doğru 45° lik eğim ile iner, yani, Eğimi -1 olan orijinden geçen bir çizgidir. Bu çizginin matematiksel ifadesi

$$z_{zemin} = -x_{zemin}$$

Şeklindedir. Eğik düzlemde inen kayakçı matematiksel olarak kayakçının eğrisi ile yerin eğrisinin kesişimi olarak gösterilir. Bu kesişimin yatay x konumunda gerçekleştiğini varsayalım. Çünkü bu nokta zeminde bir noktadır Bunun $z = -x$ e karşılık geldiğini biliyoruz. Eğer kayakçı $t = t^*$ zamanında yere inerse, bu durumda

$$x = -z$$
$$x = v_0 t^*$$
$$z = -\frac{1}{2} g t^{*2}$$

$$\Rightarrow v_0 t^* = \frac{1}{2} g t^{*2}$$

$$\Rightarrow t^* = 0 \text{ veya}$$

$$t^* = \frac{2v_0}{g}$$

Bunlardan sıfır olmayan çözüm, kayakçının inmiş olduğu zamandır. Bu zamanda

$$x = v_{0x} t^* = \frac{2v_0^2}{g} = \frac{2(30.6\, m/s)^2}{9.8} = 191 m$$

ve $z = -x = -191 m$

Böylece eğik düzlem botunca aşağı doğru olan mesafe

$$d = \sqrt{x^2 + z^2} = 270\, m$$

Şeklindedir.

(b) Kayakçı oldukça büyük hıza ulaşır bu hava direncini zorunlu hale getirir. Hava direnci gerçek mesafeyi, hesaplamış olduğumuz mesafeden daha kısa yapar. Bu derste detaylıca incelenecektir.

Problem 2.14

Eğer yörüngenin yarıçapı $R = 1.50 \times 10^{11} \mathrm{m}$ ise, bu durumda yörüngenin çevresi

$$C = 2\pi R = 2(3.14)(1.50\times10^{11} m) = 9.42\times10^{11} m$$

Olarak elde edilir. Dünya bu mesafeyi senede bir kez $\tau = 1\text{sene} = (365)(24)(60)(60)\,\text{s} = 3.15\times10^{7}\,\text{s}$ de alır. Böylece dünyanın hızı ve ivmesi

$$v = \frac{C}{\tau} = \frac{9.42\times10^{11} m}{3.15\times10^{17} s} = 2.99\times10^{4} m/s$$

$$a = \frac{v^2}{R} = \frac{\left(\frac{2\pi R}{\tau}\right)^2}{R} = \frac{4\pi^2 R}{\tau^2} = \frac{\left(2.99\times10^{4} m/s\right)^2}{1.50\times10^{11} m} = 5.97\times10^{-3} m/s^2$$

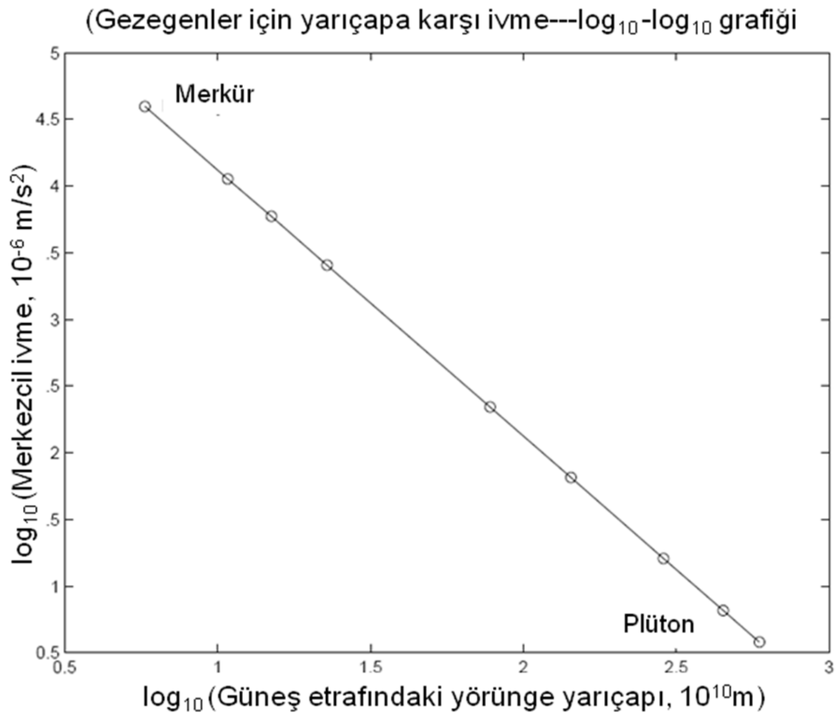
Problem 2.15

Problem 2.14 te, aslında merkezcil ivmeyi yörüngenin periyodu ve yörüngenin yarıçapı türünden hesapladık. Bu $a = \frac{4\pi^2 R}{\tau^2}$ şeklinde olup bütün gezegenler için geçerlidir. Bu sonuç bütün gezegenlerin hepsinin yörüngesinin dairesel olduğunu varsaymamaktadır, fakat çoğu gezegenin yörüngesi eliptiktir. Böylece, kullanmış olduğumuz yarıçap gezegenin güneşe olan ortalama uzaklığıdır. Bu 17.9.1999 tarihindeki ders notlarında $\overline{R}$ olarak kullanıldı. Eliptik yörüngeler bu derste daha sonraları tartışılacaktır.

(a) Buradaki tablo http://ask.com sitesine "gezegenimize olan uzaklıklar nedir?" sorusu sorulduğunda elde edilen bilgiler ile yukarıdaki formül kullanılarak elde edilen bilgileri içermektedir.

Gezegen	**Ortalama Yarıçap (m)**	**Periyot (s)**	**Merkezcil İvme (m/s^2)**
Merkür	5.79×10^{10}	7.60×10^{6}	3.96×10^{-2}
Venüs	1.08×10^{11}	1.94×10^{7}	1.13×10^{-2}
Dünya	1.50×10^{11}	3.16×10^{7}	5.93×10^{-3}
Mars	2.28×10^{11}	5.94×10^{7}	2.55×10^{-3}
Jüpiter	7.78×10^{11}	3.74×10^{8}	2.20×10^{-4}
Satürn	1.43×10^{12}	9.29×10^{8}	6.54×10^{-5}
Uranüs	2.87×10^{12}	2.65×10^{9}	1.61×10^{-5}
Neptün	4.50×10^{12}	5.20×10^{9}	6.57×10^{-6}
Plüton	5.91×10^{12}	7.84×10^{9}	3.80×10^{-6}

(b) Aşağıdaki şekil merkezcil ivmenin yörünge yarıçapına göre log-log grafiğidir. Noktalar data noktalarını göstermektedir ve çizgiler bir sonraki noktayı birbirine birleştirmektedir. Sizin çizmiş olduğunuz grafiğin ekseni seçmiş olduğunuz birime bağlı olarak farklı olabilir. Fakat eğrinin eğimi aynı olmalıdır. (Yarıçapın birimini 10^{10} m ve ivmenin birimini 10^{-6} m/s^2 olarak ifade ettim.)



Daha sonraları veriler için en iyi eğrinin nasıl belirleneceğini öğreneceksiniz. Fakat bu veriler bir çizgi üzerinde yer alıyor gibi görünmektedir, bundan dolayı bunlar arasındaki ilişkinin lineer olacağını kabul edeceğiz. Şimdi gerçek eğimi tahmin etmek için herhangi iki nokta arasındaki eğimi kullanacağız. Benim tahminim için, ben Merkür ve Plüton noktalarını kullandım. Eğim $\approx \dfrac{\log 39600 - \log 3.80}{\log 5.79 - \log 591.00} \approx -2.00$

Burada tüm gezegenlerin kütlelerinden bağımsız bir şekilde bu çizgi üzerinde yer aldıklarını fark etmelisiniz. Bu çizgi yarıçap ve ivme arasındaki ilişkiyi göstermektedir: $\log a = -2.00 \log R + C$ olup $a = K/R^2$ olduğunu ima etmektedir. Burada *C* ve *K* (derste gösterildiği gibi) gezegenin kütlesinden bağımsız olan sabitlerdir. Problem 2.14 deki ifadenin *a*, τ ve *R* ye bağlı olduğuna dikkat edin. Fakat bu ifade τ 'dan bağımsızdır ve bu τ ve *R* arasında ayrıca bir ilişkinin olması gerektiğini ifade etmektedir.

Burada yukarıdaki eğriye benzer bir grafik elde etmek için kullanılan birkaç kod satırları mevcuttur. İlk olarak Mathlab programı bulmanız gereklidir. Athena iş istasyonuna girin ve ya (1) Üstten “Numerical/Math” seçeneğini seçin, daha sonra “Analysis and Plotting” ve MAT-LAB i seçin ya da (2) komut çizgisine “add matlab, matlab” yazınız. Daha sonra komut yazılan yerde “>>” işareti çıkacaktır ve buraya

Radii=[5.79, 10.80, 15.00, 22.80, 77.80, 143.00, 387.00, 450.00, 591.00]

Acc= [39600, 11300, 5930, 2550, 220, 65.4, 16.1, 6.57, 3.80]

Plot(log10(radii)), log10(acc), ‘o’, log10(radii), log10(acc), ‘-’)

Problem 2.16

w, A dan B ye esen rüzgârın hızı, v ,havaya göre uçağın hızı ve *d,* A ile B arasındaki mesafe olsun.

A dan B ye hareket için yerin hızı (yere göre ölçülen uçağın hızı)

$$v+w$$

Şeklinde olacaktır. Ve bu hareket için geçen süre

$$t_{A\to B}=\frac{d}{v+w}$$

Olacaktır. B den A ya hareket için, yerin hızı

$$v-w$$

Ve bu uçma için geçen süre

$$t_{B\to A}=\frac{d}{v-w}$$

Olacaktır. Bu noktada, $t_{B\to A}$ değerini $w\approx v$ alarak oldukça büyük yapabiliriz. Bu hemen rüzgârın olduğu anda geriye dönüşün daha uzun zaman alacağını göstermektedir.

Toplam uçuş süresi

$$t_w=t_{A\to B}+t_{B\to A}=d\left(\frac{1}{v+w}+\frac{1}{v-w}\right)=\frac{2d}{v}\left(\frac{1}{1-w^2/v^2}\right)$$

Rüzgâr olmadığı ($w=0$) zaman uçuş süresi

$$t_0=2d/v$$

Olacaktır. Böylece t_w yı

$$t_w = t_0\left(\frac{1}{1-w^2/v^2}\right)$$

Olarak yazabiliriz. $|w|<v$ için

$$\left(\frac{1}{1-w^2/v^2}\right)>1$$

Dir, böylece $t_w > t_0$ tür ve rüzgâr varken geriye dönüş daha uzun sürecektir. Fakat $|w|>v$ için

$$\left(\frac{1}{1-w^2/v^2}\right)<0$$

Olur ve bu durumda $t_w \langle 0$ olacaktır. Böylece oldukça dikkatli olmalıyız.

$w=\pm v$ olduğu özel bir durum probleme sebep olur. Yukarıdaki t_w ifadesi sonsuz olur. Gerçekten $w=v$ durumu için B den A ya giderken yer hızı $v-w=0$ olur ve buda uçağın asla B noktasından ayrılamayacağını ifade eder. Bu yerde B noktasında duran bir kişinin uçağın havada hareketsiz kaldığını göreceği anlamına gelir. (Rüzgâr ile birlikte giden bir kuş, uçağın öne doğru gittiğini görecektir.) Böylece B den A ya seyahat için tüm etmenler yersizdir. Bu $t_{B\to A}$ ifadesinde görülmektedir ve açığa çıkmaktadır ve $w=v$ için sonsuz olmaktadır. Böylece yukarıdaki analiz iflas eder. Geriye dönüş gerçekleşmeyeceği için bunun hakkında konuşamayız. $w>v$ için yer hızı $v-w<0$ olur A dan B ye olan yönde daha da öteye uçmaya devam eder.

Eğer bunun yerine rüzgâr B den A ya esiyor olsaydı, yukarıdaki sonuçlar $w<0$ için geçerli olacaktı. Ve $w=-v$ olduğu zaman (rüzgâr B den A ya v hızı ile estiği zaman),A dan B ye yer hızı $v+w=0$ olacaktı. Hatta uçak a noktasından ayrılamayacağı için asla uçuşuna başlayamayacaktı. Ve $w<-v$ için uçak hemen B den daha da uzağa uçacaktır. Böylece bu durum için, uçak asla geriye dönüşün yarısını bile tamamlayamaz.